



MINISTERUL EDUCAȚIEI

LIBRARIA DELFIN

MATEMATICĂ

CLASA A VII-A

Gina Caba
Marinela Canu

akademos
Art

Unitatea 1: MULȚIMEA NUMERELOR REALE 11

1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural; estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional 12
2. Scoaterea factorilor de sub radical; introducerea factorilor sub radical 16
3. Numere iraționale, exemple. Mulțimea numerelor reale; incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real (definiție, proprietăți); compararea și ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări 18
4. Operații cu numere reale (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, puteri cu exponent număr întreg); raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ 28
5. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive 40
6. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ 42

Unitatea 2: ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE 49

1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități 50
2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente 52
3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii 58
4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare 68

Unitatea 3: ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR 81

1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide 82
2. Sistem de axe ortogonale în plan; reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale; reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale 84
3. Distanța dintre două puncte din plan 88
4. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice; poligonul frecvențelor 90

Unitatea 4: PATRULATERUL 101

1. Patrulaterul convex; suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex 102
2. Paralelogramul: proprietăți 104
3. Aplicații în geometria triunghiului: linie mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi 108
4. Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat; proprietăți 112
5. Trapezul, clasificare, proprietăți; linia mijlocie în trapez; trapezul isoscel, proprietăți 120
6. Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez 128

Unitatea 5: CERCUL 145

1. Unghi înscris în cerc; coarde și arce în cerc, proprietăți (la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc, diametrul perpendicular pe o coardă, arce cuprinse între coarde paralele, coarde egal depărtate de centru); tangente dintr-un punct exterior la un cerc 146
2. Poligoane regulate înscrise într-un cerc (construcție, măsuri de unghiuri) 152
3. Lungimea cercului și aria discului 156

Unitatea 6: ASEMĂNAREA TRIUNGIURILOR 159

1. Segmente proporționale; teorema paralelelor echidistante (fără demonstrație) 160
2. Teorema lui Thales (fără demonstrație); reciproca teoremei lui Thales; împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date 162
3. Triunghiuri asemenea; criterii de asemănare a triunghiurilor; teorema fundamentală a asemănării, aplicații: raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea 166

Unitatea 7: RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGIUL DREPTUNGHIC 175

1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă; teorema înălțimii; teorema catetei 176
2. Teorema lui Pitagora; reciproca teoremei lui Pitagora 180
3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit 184
4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic; aplicații: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat; aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice 188



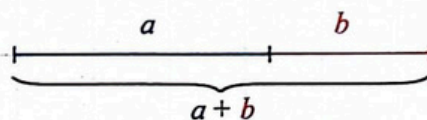
PROIECT

Dreptunghiul de aur

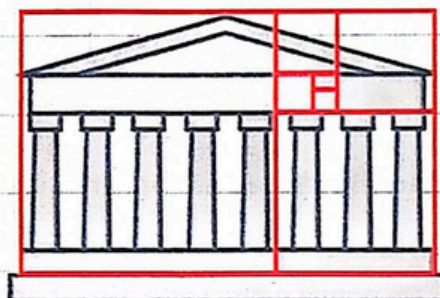
Având convingerea că „reținem 20% din ce vedem, 30% din ce auzim și 80% din ce experimentăm”, împreună cu *SuperMath* vă îndrumăm în realizarea propriilor proiecte și teme pentru portofoliu.

✓ „Secțiunea de aur” a segmentului de lungime $a + b$ este realizată atunci când $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Numărul $\frac{a}{b}$, notat φ , a cărui valoare aproximativă este 1,61803398875... a fost denumit **numărul de aur**, proporția divină sau, pur și simplu, PHI (de la Phidias, cel mai mare sculptor al lumii antice). Este un număr care are o infinitate de cifre zecimale care nu se repetă periodic.



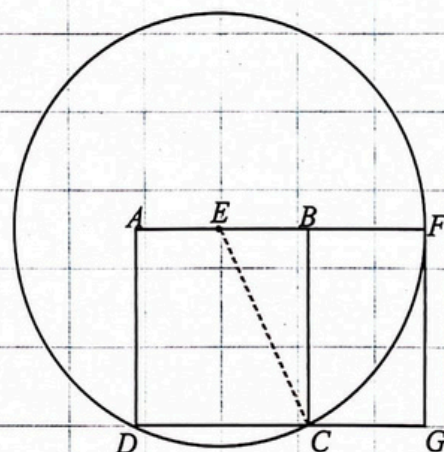
✓ Se numește **dreptunghi de aur** un dreptunghi în care raportul dintre lungime și lățime este egal cu numărul de aur.



✓ Un frumos exemplu de utilizare a dreptunghiului de aur în arhitectură este Partenonul, capodoperă a arhitecturii grecești.

✓ Construcția dreptunghiului de aur se face urmând pașii:

1. Desenați un pătrat $ABCD$;
2. Notați cu E mijlocul laturii AB ;
3. Trasați un cerc cu centrul în E și cu raza $r = EC$;
4. Prolungați AB până intersectează cercul în F .
5. Duceți $FG \perp CD$, unde $G \in CD$.



Finalizare: dreptunghiul $AFGD$ este **dreptunghi de aur**.

✓ Verificați și construiți dreptunghiul de aur în cazul particular $AB = 10$ cm.

Investigație pe internet



Numere celebre

Realizați un referat despre numărul de aur, alegând una dintre temele: *numărul de aur în artă*, *numărul de aur în muzică*, *numărul de aur și corpul omenesc*, apoi prezentați lucrarea întregii clase.

Încercați să faceți ca dimensiunile paginii pe care realizați referatul să respecte proporția de aur!

MEDIA ARITMETICĂ PONDERATĂ A n NUMERE NATURALE, $n \geq 2$

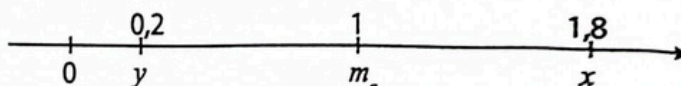
NE AMINTIM!

- 1) Calculăm media aritmetică m_a a două numere raționale $x = \frac{9}{5}$ și $y = 0,2$.
- 2) Reprezentăm pe axa numerelor reale numerele x, y și m_a . Unde este situat numărul m_a față de x și y ?

Soluție:

- 1) Formula mediei aritmetice a două numere raționale x și y este $m_a = \frac{x+y}{2}$.

În cazul nostru $m_a = \frac{\frac{9}{5} + 0,2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.



- 2) Numărul m_a este cuprins între x și y .

Observație: Dacă $x \leq y$ atunci $x \leq m_a \leq y$, iar dacă $y \leq x$ atunci $y \leq m_a \leq x$.



SĂ REZOLVĂM ÎMPREUNĂ!

Un copil cumpără 3 kg de bomboane cu 2,4 lei kilogramul și 2 kg de bomboane cu 2,8 lei kilogramul. Care este prețul mediu pe kilogram al bomboanelor?

Soluție

Pentru a calcula prețul mediu pe kilogram, urmăm pașii:

- ✓ Calculăm cât costă toate bomboanele:
 - 2,4 · 3 = 7,2 lei (costă cele 3 kg din prima categorie);
 - 2,8 · 2 = 5,6 lei (costă cele 2 kg de bomboane din a doua categorie);
 - 7,2 + 5,6 = 12,8 lei (costă toate bomboanele)
- Cantitatea de bomboane cumpărate este: 3 kg + 2 kg = 5 kg.
- ✓ Determinăm prețul mediu:
 - 12,8 : 5 = 2,56 lei (prețul mediu pe 1 kg de bomboane)

Dacă ne propunem să calculăm $\frac{2,4 \cdot 3 + 2,8 \cdot 2}{5}$ obținem tot 2,56 lei.

Acest preț mediu pe 1 kg de bomboane reprezintă media aritmetică ponderată a numerelor 2,4 și 2,8 cu ponderile 3, respectiv 2.

DEFINIȚIE

Media aritmetică ponderată a numerelor $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ cu ponderile p_1, p_2, p_3, \dots , respectiv p_n , se calculează cu formula:

$$m_{ap} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}, \text{ unde } p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \in \mathbb{N}^*$$

EXERSAȚII!



1. La un test de matematică, s-au obținut următoarele rezultate: două note de 4, o notă de 5, cinci note de 7, șase note de 8, zece note de 9 și 5 note de 10.
 - a) Câți elevi sunt în clasă?
 - b) Care a fost media pe clasă?
2. Calculați media aritmetică a numerelor $x = 5(3 - \sqrt{7})$ și $y = 5\sqrt{7}$.
3. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor $\sqrt{75}, \sqrt{48}, \sqrt{12}$ cu ponderile 1, 2, respectiv 3.
4. Media aritmetică a două numere este $5\sqrt{2}$, iar unul dintre numere este $\sqrt{2}$. Determinați al doilea număr.

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

PROIECT

Modelarea matematică



SuperMath vă prezintă exemple pentru a vă familiariza cu rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații.

1. Vecinul lui *SuperMath* are o terasă de forma unui pătrat, cu latura exprimată printr-un număr natural de metri, pe care dorește să o modifice. Pentru aceasta mărește o latură cu 1 m și alta cu 5 m, ca în figură.



Acum terasa are formă de dreptunghi cu aria de 45 m^2 .

Care a fost dimensiunea inițială a terasei?

Soluție:

Notând cu x m lungimea pătratului inițial obținem modelul matematic:

$$(x+5)(x+1) = 45.$$

Veți găsi $x = 4$.

2. Compuneți încă două probleme schimbând datele și rezolvați-le.

3. Două robinete, curgând împreună ar putea umple un bazin cu capacitatea de 1000 l în 8 ore. Dacă primul robinet curge timp de 6 ore, apoi este deschis și al doilea robinet, bazinul va fi umplut după încă 6 ore. În câte ore ar umple bazinul fiecare robinet curgând singur?

Soluție:

Notăm x ore timpul în care primul robinet ar umple 1000 l ; deci debitul acestuia este $\frac{1000 \text{ l}}{x \text{ ore}}$; analog y ore este timpul în care al doilea robinet ar umple 1000 l ; debitul este $\frac{1000 \text{ l}}{y \text{ ore}}$.

Modelul matematic este:

$$\begin{cases} 8 \cdot \left(\frac{1000}{x} + \frac{1000}{y} \right) = 1000 \\ 6 \cdot \frac{1000}{x} + 6 \cdot \left(\frac{1000}{x} + \frac{1000}{y} \right) = 1000 \end{cases}$$

Veți găsi $x = 24$ și $y = 12$.

4. Cum s-ar fi schimbat răspunsurile dacă bazinul ar fi avut capacitatea de 500 l ?
5. Redactați încă două probleme similare schimbând datele și rezolvați-le.

Investigație pe internet



Mari matematicieni români

Redactați un eseu de 1-2 pagini cu titlul *Mari matematicieni români*.

Putem enumera: Emanoil Bacaloglu, Dimitrie Pompeiu, Traian Lalescu, Gheorghe Țițeica, Dan Barbilian, Grigore Moisil, Solomon Marcus, Miron Nicolescu etc.

Căutați materiale video cu extrase din interviuri și conferințe.

Inserați anecdote sau notițe biografice și prezentați-le întregii clase.

LEBRĂRII DELEFIN

PATRULATERUL

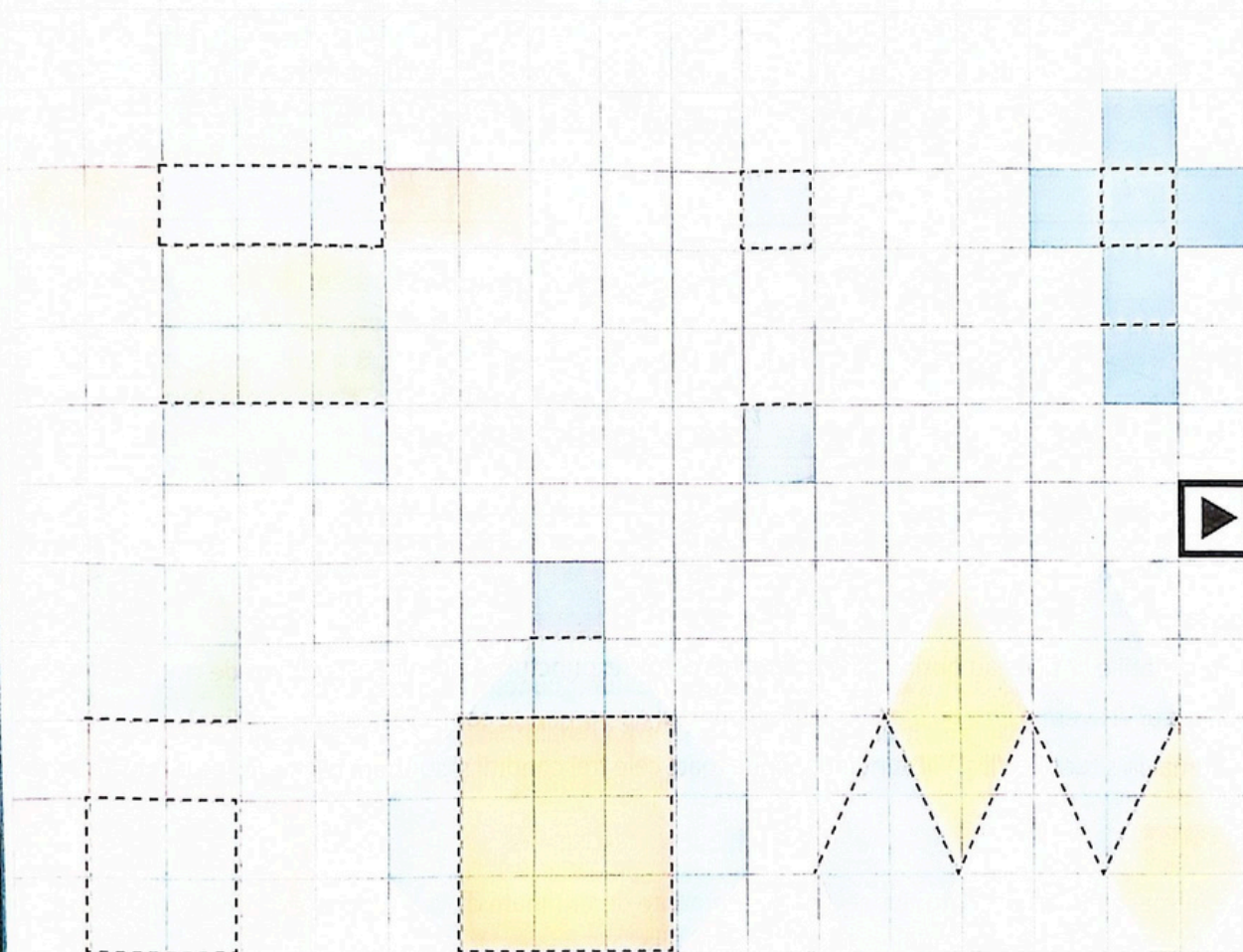
PROIECT

Patrulaterele din jurul nostru

SuperMath te va îndruma metodic în reamintirea cunoștințelor despre figuri geometrice.

Pasul 1 Privește obiecte din preajma ta și *identifică*: pătrate, dreptunghiuri, rombur și paralelograme. Descrie elementele caracteristice și enunță proprietățile pe care ți le amintești. Desenează pe foi câte 5 patrulatere cu dimensiuni diferite, denumește-le, clasifică-le și pune-le la portofoliul tău.

Pasul 2 Pe foi cu pătrățele desenează configurațiile de mai jos. Pe contur *vei decupa*, iar pe linia punctată *vei plia* până obții corpuri geometrice. Denumeste corpurile geometrice cunoscute, analizează fețele (după formă și număr) și păstrează desfășurările la portofoliu.



Investigație pe internet



DIGIȚICA îți propune să cauți pe internet după expresia „corpuri geometrice” (eventual, traduci într-o limbă de circulație internațională) și să analizezi rezultatele căutării (imagini, decorațiuni geometrice, filmulețe, tutoriale video, construcții, fotografii etc).

Află și reține denumiri noi, pune întrebări profesorului despre figurile geometrice necunoscute.

Tipărește cele mai interesante imagini și păstrează-le la portofoliu. Cred că te-ai convins de importanța geometriei în viața de zi cu zi și vasta aplicabilitate practică!

RELATII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC

Unitatea

7

PROIECT

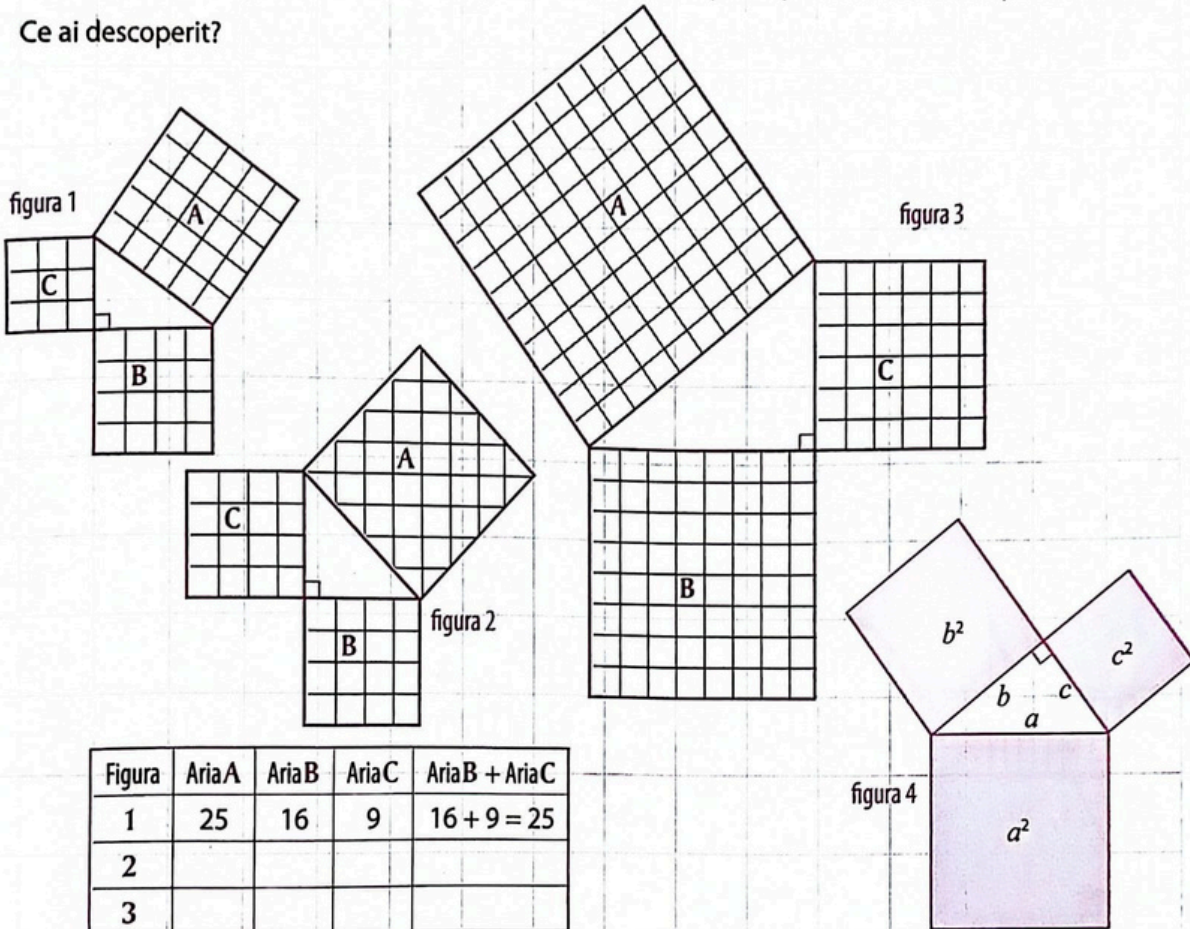
Teorema lui Pitagora – Scurt istoric



- ✓ *SuperMath* te îndrumă să redescoperi și să-ți reamintești un rezultat foarte important pentru geometrie și cu numeroase aplicații practice.

În desenele de mai jos, calculează ariile pătratelor, transcrie și completează tabelul după model.

Ce ai descoperit?



Teorema lui Pitagora este una dintre cele mai cunoscute teoreme din geometria euclidiană. Istoria spune că Pitagora, (cca 550-495 î.H.), filozof și matematician grec, a fost recunoscut pentru prima demonstrație a teoremei care se formulează astfel: **în orice triunghi dreptunghic suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.**

- ✓ Urmăriți pe internet animații video prin care se demonstrează teorema lui Pitagora.

Investigație pe internet



Tripletele pitagoreice

Un triplet pitagoreic conține trei numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$.

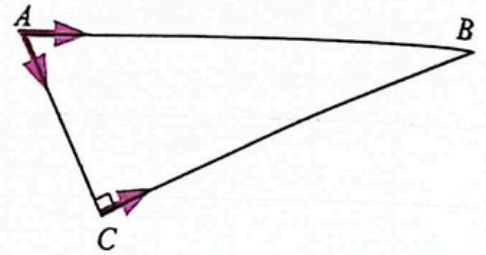
Un triplet pitagoreic (a, b, c) se numește **primitiv** dacă numerele a, b, c sunt prime între ele.

Căutați pe internet lista de triplete pitagoreice cu valori mai mici decât 100 și păstrați-o la portofoliu.



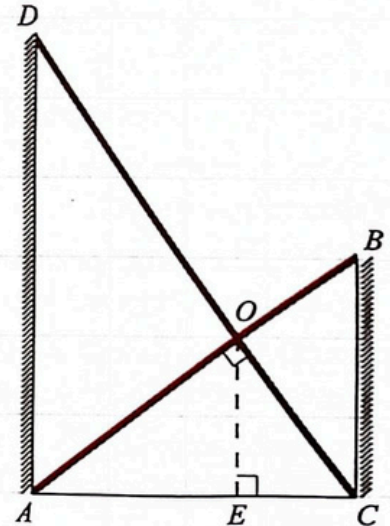
APROXIMAREA ÎN SITUAȚII PRACTICE A DISTANȚELOR FOLOSIND RELAȚII METRICE

1. Distanța dintre două orașe A și B este de 185 km. Există o șosea care le leagă în linie dreaptă și o altă șosea care pornește din A , merge în linie dreaptă până în orașul C , ($AC = 75$ km), apoi cotește în unghi drept și continuă în linie dreaptă până în orașul B . Din A pleacă în același timp două mașini: una merge pe drumul AB cu o viteză medie de 50 km/h, iar cealaltă merge pe drumul $A - C - B$. Cu ce viteză medie trebuie să meargă a doua mașină pentru a ajunge în orașul B în același timp cu prima mașină?



Indicație: Determinați CB cu teorema lui Pitagora în triunghiul ABC , dreptunghic în C : găsiți: $BC \approx 169,12$ km. Determinați timpul în care prima mașină parcurge distanța AB : 3 ore și 42 minute. În același timp a doua mașină parcurge circa 244,12 km cu viteza medie de aproximativ 66 km/h.

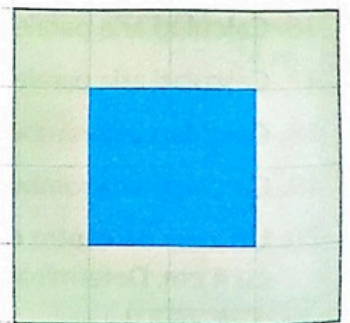
2. Două scări sunt plasate între doi pereți verticali ca în figură (prima scară a fost reprezentată prin segmentul AB , iar a doua prin segmentul CD). Cele două scări formează între ele un unghi drept. Distanța dintre cei doi pereți este de 5 m, iar scara AB are lungimea de 6,25 m.



- Calculați AD , BC și CD .
- Determinați distanța de la punctul de intersecție a scărilor la sol.

Indicație: Identificați triunghiuri dreptunghice și perechi de triunghiuri asemenea.

3. În centrul unui teren în formă de pătrat se află un bazin în formă de pătrat. Laturile celor două pătrate sunt paralele. Determinați lungimea celui mai scurt drum de la un colț al terenului la colțul opus, știind că latura terenului are lungimea de 20 m, iar bazinul are perimetrul de 40 m.



- Calculați lungimea cablului AC al macaralei din figura 1.
- Dacă AB se modifică, scăzând cu 2 m, cât devine înălțimea CA ? (Vezi figura 2.)

