



LIBRARIA **DELFIN**

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR
DE MATEMATICĂ
PENTRU GIMNAZIU**

EDITURA HYPERION



1.1 Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență

1. **Mulțimea** este o noțiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulțimea reprezintă o colecție (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele unei mulțimi cu litere mici.

2. Fiind dată mulțimea A și a este un element al mulțimii A , atunci scriem $a \in A$ și citim a **aparține** lui A .

Fiind dată mulțimea A și a nu este un element al mulțimii A , atunci scriem $a \notin A$ și citim a **nu aparține** lui A .

3. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează \emptyset .

Exemplu: $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 3\} = \emptyset$.

4. O mulțime A poate fi dată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, x, 5, y\}$.

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

Exemple: 1. A este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea A se poate scrie $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. B este mulțimea literelor cuvântului **matematică**. Mulțimea B se poate scrie $B = \{m, a, t, e, i, c, ă\}$;

3. C este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.

4. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

5. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3 \leq x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

6. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \mid 8\} = \{1, 2, 4, 8\}$;

7. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x : 4 \text{ și } x < 30\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$;



3. Mulțimea numerelor întregi

3.1 Număr întreg, opusul unui număr întreg, reprezentarea pe axă a numerelor întregi, valoarea absolută(modulul)

1. Mulțimea numerelor întregi este formată din numerele întregi pozitive (numere naturale), numerele întregi negative (adică numerele $-1, -2, -3, \dots$) și numărul 0 și se notează cu \mathbf{Z} .

Deci $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Exemple. a) Numerele întregi mai mari decât -3 și mai mici decât 2 sunt: $-2, -1, 0, 1$.

b) Mulțimea: $\{x \in \mathbf{Z} \mid -4 \leq x < 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2. Orice număr natural este număr întreg pozitiv și atunci rezultă că mulțimea numerelor naturale este inclusă în mulțimea numerelor întregi, adică $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

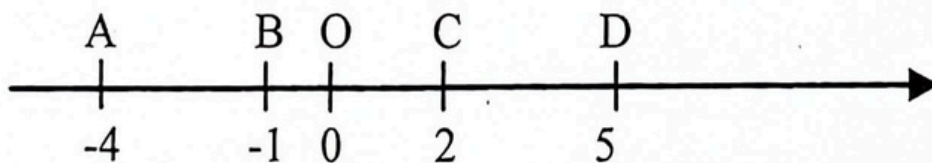
3. Numerele întregi se reprezintă pe axa numerelor astfel:

a) numărul 0 corespunde originii O a axelor de coordonate;

b) numerele întregi pozitive corespund punctelor ce se găsesc în dreapta originii, astfel încât distanța dintre două puncte consecutive să fie egală cu unitatea de măsură;

c) numerele întregi negative corespund punctelor ce se găsesc în stânga originii, astfel încât distanța dintre două puncte consecutive să fie egală cu unitatea de măsură.

Exemplu. Numerele întregi $-4, -1, 0, 2, 5$ se reprezintă astfel:



4. Fiind dat numărul a , întreg și diferit de 0, numim opusul lui a numărul $-a$, obținut prin schimbarea semnului lui a .

Exemple. Opusul lui 3 este -3 , opusul lui -5 este 5, iar opusul lui 0 este 0.

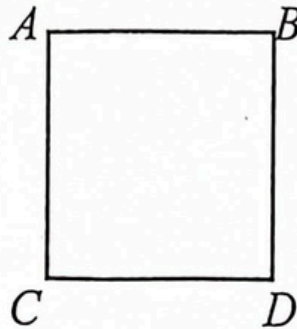
5. Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg x , se notează $|x|$ și se definește:



7.3.3 Pătratul

LIBRARIADDELFIN

1. Definiție. Un romb care are un unghi drept se numește pătrat.



2. Proprietăți.

a) referitoare la laturi

– Într-un pătrat toate laturile sunt congruente;

b) referitoare la unghiuri

– Într-un pătrat toate unghiurile sunt congruente și drepte;

c) referitoare la diagonale

– Într-un pătrat diagonalele sunt perpendiculare;

– Într-un pătrat diagonalele sunt congruente;

– Într-un pătrat diagonalele se înjumătățesc;

– Într-un pătrat diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor

lui.

3. Aplicații.

a) Fie $ABCD$ un pătrat și punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$ astfel încât $AM = BN = CP = DQ$.

Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Soluție. $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM \equiv \triangle CPN \equiv \triangle DQP \Rightarrow MQ = MN = NP = PQ$ și deci $MNPQ$ este romb.

$m(\widehat{AQM}) + m(\widehat{AMQ}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{AQM}) + m(\widehat{DQP}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{PQM}) = 90^\circ$.

b) Fie $ABCD$ un pătrat și O intersecția diagonalelor lui. Pe latura AB luăm punctul M astfel încât $[AM] \equiv [OD]$. Să se



LIBRARIA DELFIN

CUPRINS

Algebră

1	Mulțimi	3
1.1	Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență	3
1.2	Relația între două mulțimi. Submulțimi	4
1.3	Operații cu submulțimi	5
1.4	Aplicații	6
2.	Mulțimea numerelor naturale	8
2.1	Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal	8
2.2	Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximarea și rotunjirea numerelor naturale	10
2.3	Adunarea numerelor naturale	12
2.4	Scăderea numerelor naturale	13
2.5	Înmulțirea numerelor naturale. Factor comun. Ordinea efectuării operațiilor. Utilizarea parantezelor	14
2.6	Împărțirea cu rest a numerelor naturale	16
2.7	Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural. Compararea puterilor care au aceeași bază sau același exponent. Ordinea efectuării operațiilor	17
2.8	Divizor. Multiplu	21
2.9	Criterii de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3 și 9	22
2.10	Numere prime. Numere compuse	24
2.11	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	25
2.12	Divizori comuni a două sau mai multe numere naturale. C.m.m.d.c. Numere prime între ele	26
2.13	Multipli comuni a două sau mai multe numere	



	naturale. C.m.m.m.c. Relația dintre c.m.m.d.c. și e.m.m.m.c.	27
	2.14 Aplicații	28
3	Mulțimea numerelor întregi	31
3.1	Număr întreg, opusul unui număr întreg, reprezentarea pe axă a numerelor întregi, valoarea absolută (modulul)	31
3.2	Compararea și ordonarea numerelor întregi ..	32
3.3	Adunarea numerelor întregi	33
3.4	Scăderea numerelor întregi	34
3.5	Înmulțirea numerelor întregi	34
3.6	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	35
3.7	Ridicarea la putere a numerelor întregi	36
3.8	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	37
3.9	Divizorii unui număr întreg	37
3.10	Aplicații	39
4	Mulțimea numerelor raționale	40
4.1	Numere raționale pozitive	40
4.2	Mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} ; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor; opusul unui număr rațional; valoarea absolută (modulul) unui număr rațional	48
4.3	Compararea și ordonarea numerelor raționale	49
4.4	Adunarea și scăderea numerelor raționale ...	50
4.5	Înmulțirea numerelor raționale	52
4.6	Împărțirea numerelor raționale	52
4.7	Puterea unui număr rațional cu exponent întreg. Reguli de calcul cu puteri	52
4.8	Aplicații	54
5	Numere reale	54
5.1	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat	



	perfect	54
	5.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv pătrat perfect	54
	5.3 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv care nu este pătrat perfect	55
	5.4 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	56
	5.5 Operații cu numere reale de forma $a\sqrt{b}$, $b \in \mathbb{Q}$, $a > 0$	56
	5.6 Raționalizarea numitorului unei fracții, având numitorul irațional	57
6	Rapoarte și proporții	58
	6.1 Rapoarte și procente	58
	6.2 Proporții	59
	6.3 Mărimi direct proporționale. Regula de trei simplă	59
	6.4 Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	60
	6.5 Media aritmetică	61
	6.6 Media aritmetică ponderată	61
	6.7 Probabilitatea realizării unor evenimente	62
	6.8 Aplicații	62
7	Calcul algebric	64
	7.1 Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.2 Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.3 Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	65
	7.4 Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere	65
	7.5 Formule de calcul prescurtat	66
	7.6 Descompunerea în factori	66
	7.7 Rapoarte de numere reale reprezentate prin	



	litere. Operații cu acestea	68
	7.8 Inegalități	70
8	Funcții	72
9	Ecuatii și inecuații	75
	9.1 Ecuatii de forma $ax + b = 0, x \in \mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$	75
	9.2 Ecuatii de forma $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}$.	76
	9.3 Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$	77
	9.4 Inecuații de forma $ax + b > 0 (\geq 0, < 0, \geq 0)$ $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$	79
	9.5 Aplicații	79
10	Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I	80
	10.1 Sisteme de ecuații de gradul I cu două necunoscute	80
	10.2 Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută	81
	10.3 Aplicații	82
	Geometrie plană	83
1.	Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	83
	1.1 Punctul	83
	1.2 Dreapta	83
	1.3 Segmentul de dreaptă	85
	1.4 Semidreapta	88
2.	Unghiul	89
	2.1 Elementele și măsura unui unghi	89
	2.2 Clasificarea unghiurilor	90
	2.3 Congruența unghiurilor	90
	2.4 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi	90
	2.5 Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	92
	Congruența triunghiurilor	94
	3.1 Triunghi: definiție, elemente; clasificarea	



triunghiurilor; perimetrul triunghiului	94
3.2 Construcția triunghiurilor	96
3.3 Congruența triunghiului oarecare	97
4. Perpendicularitate	99
4.1 Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	99
4.2 Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	99
4.3 Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	101
4.4 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	102
5. Paralelism	103
5.1 Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	103
5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	104
6. Proprietăți ale triunghiurilor	107
6.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	107
6.2 Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi	108
6.3 Proprietăți ale triunghiului isoscel	109
6.4 Proprietăți ale triunghiului echilateral	111
6.5 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	112
7. Patrulatere	113
7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	113
7.2 Paralelogram; proprietăți	114
7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți	116



7.4	Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți . . .	120
7.5	Arii; calculul ariilor unor suprafețe	122
7.6	Aplicații	125
8	Asemănarea triunghiurilor	126
8.1	Raportul a două segmente, segmente proporționale	126
8.2	Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	126
8.3	Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	127
8.4	Linia mijlocie în trapez; proprietăți	128
8.5	Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării	128
8.6	Aplicații	129
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic	131
9.1	Proiecții ortogonale pe o dreaptă	131
9.2	Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora	131
9.3	Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi	132
9.4	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	133
9.5	Aplicații	134
10	Cercul	135
10.1	Cercul; definiție, elemente	135
10.2	Unghi la centru; măsura arcelor; arce congruente	136
10.3	Coarde și arce în cerc	136
10.4	Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc .	137
10.5	Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil	137
10.6	Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater	



circumscriș unui cerc	138
10.7 Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat	139
10.8 Aplicații	140
Geometrie în spațiu	141
1. Relații între puncte, drepte și plane	141
1.1 Puncte, drepte, plane; determinarea dreptei, determinarea planului	141
1.2 Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare	141
1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan	142
1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele	143
1.5 Aplicații	143
2. Proiecții ortogonale pe un plan	146
2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	146
2.2 Teorema celor trei perpendiculare	148
2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	149
3. Corpuri geometrice	150
3.1 Prisma regulată.	150
3.2 Piramida regulată	153
3.3 Trunchiul de piramidă regulată	156
3.4 Corpuri rotunde	158
3.4.1 Cilindrul circular drept	158
3.4.2 Conul circular drept	160
3.4.3 Trunchiul de con circular drept	161
3.4.4 Sfera	162