



LIBRARIADDELFIN
GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM
MATEMATICĂ
FĂRĂ PROFESOR
CLASA A IX – A
PROFIL INFORMATICĂ**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021**



1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere raționale

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

3. a) Număr rațional = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare echivalente cu o fracție ordinară dată.

b) Frațiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt echivalente dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.

Exemplu. Frațiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 63$.

c) Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$.

În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

4. a) Frație ireductibilă = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).

Exemple. Frațiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

b) Frație reductibilă = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.

Exemple. Frațiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

5. Frație zecimală. Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1 a_2 a_3 \dots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \dots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.

Exemple. a) $\frac{7}{5} = 1,4$ b) $-\frac{15}{4} = -3,75$ c) $\frac{125}{8} = 15,625$.



1. Definiție. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r , numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k, k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r .

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 2$, $r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n - 1)r = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3n - 1$, avem $a_1 = 2$, $a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \dots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este



LIBRARIA DELEN

5. Funcția de gradul al doilea

5.1 Ecuția de gradul al doilea

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Ecuția de gradul al doilea are forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

Discriminantul ecuației este: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții reale date de:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are o soluție reală dată de:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are nici o soluție reală.

Exemple. a) Ecuția $x^2 - 3x + 2 = 0$ are $\Delta = 1$ și soluțiile 1 și 2.

b) Ecuția $x^2 - 4x + 4 = 0$ are $\Delta = 0$ și soluția 2.

c) Ecuția $x^2 - x + 1 = 0$ are $\Delta = -3$ și nu are soluții reale.

2. Relațiile lui Viète

Fiind dată ecuația de gradul al doilea:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

relațiile lui Viète, sau relațiile între rădăcini și coeficienți sunt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Formule importante:

- 1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$;
- 2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$;
- 3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \dots$;
- 4) $x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2 + x_2^2)^3 - 3x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$.

Exemple. Fără a rezolva ecuația $x^2 - x + 2 = 0$, să se calculeze:

- a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^3 + x_2^3$ c) $x_1^4 + x_2^4$.

Soluție. Avem: $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 x_2 = 2$.

- a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1^2 - 4 = -3$.
b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 - 6 = -5$.
c) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 1$.



LIBRARIADDELFIN

8.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exânscriș în triunghi. Calcul de arii.

a) Noțiuni teoretice și exemple

Notății: $S =$ aria ΔABC și $p =$ semiperimetrul ΔABC .

1. Teorema sinusurilor

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c și raza cercului circumscris R sunt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.\end{aligned}$$

3. Formule ale funcțiilor trigonometrice ale jumătăților de unghiuri

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}; \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$



LIBRARIA DELFIN CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	205
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	205
1.1.1 Numere raționale	5	205
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	206
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale.		
Puteri cu exponent întreg	12	208
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	18	209
1.1.5 Modulul unui număr real	20	210
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	24	212
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	27	213
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale	32	214
1.2 Elemente de logică matematică	36	214
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori.		
Operații logice elementare	36	214
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	41	216
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	46	217
1.2.4 Probleme de numărare	50	218
1.3 Inegalități	52	219
1.4 Teste grilă de autoevaluare	57	220
Testul 1	57	220
Testul 2	58	221
Testul 3	59	221
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	60	222
2.1 Șiruri	60	222
2.2 Progresii aritmetice	63	223
2.3 Progresii geometrice	69	225
2.4 Teste grilă de autoevaluare	74	226
Testul 1	74	226



Testul 2	75	227
3. Funcții, lecturi grafice	76	228
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m, m \in \mathbf{R}$	76	228
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	79	229
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	81	229
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărginire, monotonie	84	230
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	85	232
3.6 Compunerea funcțiilor	89	233
3.7 Teste grilă de autoevaluare	93	234
Testul 1	93	234
Testul 2	94	235
4. Funcția de gradul I	95	236
4.1 Ecuația de gradul I	95	236
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	97	237
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	100	237
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	104	239
4.5 Sisteme de inecuații de gradul I	107	239
4.6 Teste grilă de autoevaluare	109	240
Testul 1	109	240
Testul 2	110	241
5. Funcția de gradul al doilea	111	241
5.1 Ecuația de gradul al doilea.	111	241
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	119	243
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	125	245
5.4 Teste de evaluare	130	247
Testul 1	130	247
Testul 2	131	248
6. Vectori în plan	132	248



6.1	Segmente orientate	132	248
6.2	Vectori. Operații cu vectori	136	249
6.3	Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	130	250
6.4	Coliniaritate, concurență, paralelism. Teorema bisectoarei, relația lui Sylvester, teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.	146	251
6.5	Teste de evaluare	153	253
	Testul 1	153	253
7.	Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	154	254
7.1	Unități de măsură pentru unghiuri și arce	154	254
7.2	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	156	255
7.3	Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	161	257
7.4	Reducerea la primul cadran	167	258
7.5	Formule de legătură între funcțiile trigonometrice	172	259
7.6	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	175	261
7.7	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	180	262
7.8	Formule pentru transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	186	264
7.9	Teste grilă de autoevaluare	192	265
	Testul 1	192	265
	Testul 2	193	266
8.	Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	194	268
8.1	Produsul scalar a doi vectori	194	268
8.2	Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exâncris în triunghi. Calcul de arii	197	269
8.3	Teste grilă de autoevaluare	203	272
	Testul 1	203	272
	Testul 2	204	273