GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR

CLASA A IX – A

PROFIL INFORMATICĂ

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021

1. Mulțimi și elemente de logică matematică
1.1 Mulțimea numerelor reale
1.1.1 Numere raționale
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, \}$.

2. Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \}$.

3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.

b) Fracțiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.

Exemplu. Fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 =$ $= 7 \cdot 9 = 63$.

c) **Mulțimea numerelor raționale**: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\right\}$.

În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).

Exemple. Fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.

Exemple. Fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

5. Fracție zecimală. Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1a_2a_3 \cdots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \cdots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.

Exemple. a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ b) $-\frac{15}{4} = -3{,}75$ c) $\frac{125}{8} = 15{,}625$.

2.2 Progresii aritmetice

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r.

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 2$, $r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

3. Suma primilor *n* termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + + \cdots + a_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2+29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \cdots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este

5. Funcția de gradul al doilea
5.1 Ecuația de gradul al doilea
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Ecuația de gradul al doilea are forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

Discriminantul ecuației este: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții reale date de:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă $\Delta = 0$. atunci ecuația are o soluție reală dată de:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are nici o soluție reală.

Exemple. a) Ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are $\Delta = 1$ și soluțiile 1 și 2.

b) Ecuația $x^2 - 4x + 4 = 0$ are $\Delta = 0$ și soluția 2.

c) Ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ are $\Delta = -3$ și nu are soluții reale.

2. Relațiile lui Viete

Fiind dată **ecuația de gradul al doilea**:

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

relațiile lui Viete, sau relațiile între rădăcini și coeficienți sunt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Formule importante:

1) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;
2) $x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$;
3) $x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2 = \cdots$;
4) $x_1{}^6 + x_2{}^6 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^3 - 3x_1{}^2x_2{}^2(x_1{}^2 + x_2{}^2)$.

Exemple. Fără a rezolva ecuația $x^2 - x + 2 = 0$, să se calculeze:

a) $x_1{}^2 + x_2{}^2$ b) $x_1{}^3 + x_2{}^3$ c) $x_1{}^4 + x_2{}^4$.

Soluție. Avem: $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1x_2 = 2$.

a) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 4 = -3$.

b) $x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 1 - 6 = -5$.

c) $x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 1$.

8.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exânscris în triunghi. Calcul de arii.

a) Noțiuni teoretice și exemple

Notații: $S =$ aria $\Delta\, ABC$ și $p =$ semiperimetrul $\Delta\, ABC$.

1. Teorema sinusurilor

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c și raza cercului circumscris R sunt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

3. Formule ale funcțiilor trigonometrice ale jumătăților de unghiuri

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}; \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

CUPRINS