GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

PENTRU CLASELE 9-12

Ediţia a 5-a

EDITURA HYPERION

1. NUMERE REALE

1. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracţiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

a) $\frac{6}{n+1}$; b) $\frac{10}{n+2}$; c) $\frac{n+5}{n+1}$; d) $\frac{2n+7}{n+2}$; e) $\frac{6n+14}{2n+3}$.

2. Să se determine $n \in \mathbf{Z}$ astfel încât fracţiile următoare să fie echivalente cu numere naturale :

a) $\frac{5}{n+3}$; b) $\frac{12}{n+2}$; c) $\frac{n+3}{n+2}$; d) $\frac{2n+1}{2n-5}$; e) $\frac{6n+20}{3n+5}$.

3. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracţiile următoare să fie echivalente cu numere întregi:

a) $\frac{8}{n-1}$; b) $\frac{11}{n-2}$; c) $\frac{n-1}{n-7}$; d) $\frac{2n-1}{n-5}$; e) $\frac{2n+3}{2n-7}$.

4. Să se determine $n \in \mathbf{Z}$ astfel încât fracţiile următoare să fie echivalente cu numere întregi:

a) $\frac{6}{n-1}$; b) $\frac{9}{n+2}$; c) $\frac{n-2}{n+1}$; d) $\frac{2n+5}{2n-7}$; e) $\frac{6n-1}{3n+2}$.

5. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$\frac{4n-5}{2n+1} \in \mathbf{Z} \text{ şi } \frac{5n+3}{n-1} \in \mathbf{Z}.$$

6. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, fracţiile următoare sunt reductibile:

a) $\frac{2^n+10^n}{3^n+15^n}$; b) $\frac{2^n+6^n}{3^n+9^n}$; c) $\frac{2^n+8^n}{3^n+12^n}$; d) $\frac{2^n+4^n}{3^n+6^n}$.

7. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, fracţiile următoare sunt reductibile:

a) $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$; b) $\frac{n^2+5n+12}{n^2-5n+12}$; c) $\frac{n^3-4n+12}{n^3-7n+12}$.

5. FUNCŢIA DE GRADUL I

1. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=2x+1$ b) $f(x)=-x+3$ c) $f(x)=-3x-1$.

2. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f:[-2,2]\to\mathbf{R}, f(x)=-3x+2$;

b) $f:(-4,2)\to\mathbf{R}, f(x)=3x+1$;

c) $f:[1,5)\to\mathbf{R}, f(x)=2x-5$.

3. Să se determine $a\in\mathbf{R}$, astfel încât graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ să treacă prin punctul indicat:

a) $f(x)=3x+a$ prin $A(2,3)$;

b) $f(x)=ax+4$ prin $A(1,4)$;

c) $f(x)=(a+1)x+a-2$ prin $A(1,1)$.

4. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ să treacă prin punctul indicat:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \begin{cases} x+a & \text{dacã } x>2 \\ 3x+5 & \text{dacã } x\le 2 \end{cases}$ $A(3,10)$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \begin{cases} x+1 & \text{dacã } x<-1 \\ ax-5 & \text{dacã } x\ge -1 \end{cases}$ $A(1,3)$;

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \begin{cases} ax+1 & \text{dacã } x\ge 1 \\ x+a & \text{dacã } x<1 \end{cases}$ $A(2,5)$.

5. Să se determine funcţia de gradul întâi, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b, a\ne 0$ ştiind că graficul ei trece prin punctele:

a) $A(1,4), B(-1,-2)$; b) $A(2,-3), B(5,0)$;

c) $A(1,6), B(0,-1)$; d) $A(0,3), B(2,7)$;

e) $A(3,0), B(0,-3)$; f) $A(1,1), B(2,4)$.

9. PROGRESII ARITMETICE ŞI GEOMETRICE

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir dat prin termenul general:

a) $a_n = 2n+1$; b) $a_n = -3n+1$; c) $a_n = 3n-7$.

Să se demonstreze în fiecare caz în parte că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică şi să se determine primul termen şi raţia.

2. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că:

a) $a_4 = 7, a = 15$;
b) $a_1 + a_5 = 10, a_3 + a_8 = 10$;
c) $a_1 + a_3 = 8, S_4 = 22$;
d) $a_4 + a_5 = 23, S_3 = 12$;
e) $a_1 + a_6 = 0, S_6 = 0$;
f) $2\cdot(a_1 + a_3) = a_7, S_3 = 15$;
g) $S_4 = 10, S_6 = 21$;
h) $S_4 = -28, S_{11} = 0$.

3. Să se determine primul termen şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că:

a) $\begin{cases} a_2 + a_5 = \dfrac{3}{2}a_6 \\ 2a_8 - a_3 - a_6 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 22 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 33 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_8 + a_9 - a_7 = 2a_5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_{10} \end{cases}$; d) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = a_7 + 2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = a_6 + 1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 0 \\ a_1 + a_4 + a_5 + a_8 = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} a_2 + 2a_3 = 21 \\ a_4 + a_5 = a_2 + a_7 \end{cases}$; h) $\begin{cases} a_2 a_3 = a_1 a_7 \\ a_1 a_5 = 2a_6 - a_3 + 2 \end{cases}$.

14. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

1. În câte moduri pot fi aşezate 5 cărţi pe un raft?

2. Să se calculeze în câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, astfel încât 1 să fie pe prima poziţie.

3. Să se calculeze în câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, astfel încât 1 să fie pe prima poziţie şi 2 pe poziţia a doua.

4. Câte numere cu cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5?

5. Câte numere cu cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4?

6. Un tramvai are 3 vagoane. Să se calculeze în câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea tramvaiului.

7. Să se calculeze câte numere cu cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5 astfel încât suma primelor două cifre să fie egală cu 3.

8. Câte numere cu cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 astfel încât suma primelor două cifre să fie 3?

9. La faza finală a unui concurs de gimnastică participă 6 concurenţi.

Câte posibilităţi de stabilire a clasamentului final există?

10. Într-o clasă sunt 10 băieţi şi 15 fete. Băieţii au 10 bănci în care sunt aşezaţi numai băieţi, iar fetele au 15 bănci în care sunt aşezate numai ele.

În câte moduri pot fi aşezaţi cei 25 de copii în bănci?

19. GRUPURI

1. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=\mathbf{Z}; x*y=x+y-2$;

b) $\mathbf{G}=\mathbf{Z}; x*y=x+y+1$;

c) $\mathbf{G}=\mathbf{Q}; x*y=x+y-7$;

d) $\mathbf{G}=\mathbf{R}; x*y=x+y-4$;

e) $\mathbf{G}=\mathbf{R}; x*y=x\cdot\sqrt{y^2+1}+y\cdot\sqrt{x^2+1}$;

f) $\mathbf{G}=\mathbf{R}; x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

g) $\mathbf{G}=\mathbf{C}-\{1\}; x*y=x+y-xy$.

2. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=(-5,+\infty); x*y=xy+5x+5y+20$;

b) $\mathbf{G}=(-3,+\infty); x*y=xy+3x+3y+6$

c) $\mathbf{G}=(1,+\infty); x*y=xy-x-y+2$;

d) $\mathbf{G}=(4,+\infty); x*y=xy-4x-4y+20$;

e) $\mathbf{G}=(\sqrt{2},+\infty); x*y=\sqrt{x^2y^2-2x^2-2y^2+6}$;

f) $\mathbf{G}=(1,+\infty); x*y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$;

g) $\mathbf{G}=(3,+\infty); x*y=\sqrt{x^2y^2-9x^2-9y^2+90}$.

3. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=(-1,1); x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$;

b) $\mathbf{G}=(-2,1); x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$;

21. INELE DE POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV (Q, R, C)

1. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinoamele:

a) $\mathbf{P}(x) = x^3 + (a-1)x^2 - 7x + 6a$;

b) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 4x^3 - (5a+2)x^2 - 100x - 5(4a-1)$;

c) $\mathbf{P}(x) = x^5 + (a-2)x^4 - x^3 + (a-1)x^2 + (a-2)x - 1$;

să se dividă prin $x + 1$.

2. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinoamele:

a) $\mathbf{P}(x) = x^3 + (a+2)x^2 + (2a-1)x + 7$;

b) $P(x) = ax^4 - (a+1)x^3 + (6a-1)x^2 - 10x + 2$;

c) $\mathbf{P}(x) = x^5 - 5x^4 + (a+3)x^3 + (5a-2)x^2 - ax + 12$;

să dea la împărțirea cu $x + 1$ restul 3.

3. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele polinoame să se dividă:

a) $\mathbf{P}(x) = ax^3 + (b-1)x^2 - x - 2$;
$\mathbf{Q}(x) = (x-1)(x+1)$;

b) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 4x^3 - (4b+2)x^2 + 4ax - 75$;
$\mathbf{Q}(x) = (x-1)(x-3)$;

c) $\mathbf{P}(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-2)x^2 + (b-a)x + a$;
$\mathbf{Q}(x) = (x+1)(x+2)$;

d) $\mathbf{P}(x) = x^5 - (a-1)x^4 + bx^3 + (2a-3)x^2 + x + b$;
$\mathbf{Q}(x) = (x-1)(x+2)$.

4. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele polinoame să se dividă:

a) $P(x) = x^4 + bx^3 + (b-2a)x^2 + 5x - 3a$;
$\mathbf{Q}(x) = x^2 + x + 2$;

b) $\mathbf{P}(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + (a+1)x^2 - 3x - a - 2$;

Cuprins

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA